



Toto sú návodné úlohy k domácejmu kolu 41. ročníka Olympiády v informatike, kategória B. Ide teda o sadu ľahších úloh, ktoré tematicky súvisia so súťažnými úlohami. Riešenie týchto úloh môže byť dobrou prípravou na riešenie súťažných úloh. Za riešenia týchto návodných úloh nie sú žiadne body do súťaže. O ich riešení môžete ľubovoľne diskutovať – so svojim učiteľom, inými súťažiacimi aj kýmkoľvek iným.

Návodné úlohy k domácejmu kolu OI: kategória B

B-I-1 Preteky

1. Akú dráhu prejde traktor, ktorý začína na rýchlosti 0 m/s a následne t sekúnd po sebe zrýchľuje?
2. Traktor sa predchádzajúcu sekundu hýbal rýchlosťou $v \text{ m/s}$. Teraz začne spomaľovať a bude tak robiť každú sekundu až do úplného zastavenia. Akú dráhu ešte prejde?
3. Akú dráhu prejde traktor, ktorý mal doteraz rýchlosť $v \text{ m/s}$, ak začne spomaľovať až kým nebude mať rýchlosť $x \text{ m/s}$?
4. Predstavme si, že radar bol z konca trate odstránený. Akou najvyššou rýchlosťou vie prejsť traktor cieľom, ak vieme, že dĺžka trate je 10^8 metrov?
5. Jožko vyrazil zo štartu a postupne menil svoju rýchlosť nasledovne: najprv 5 sekúnd zrýchľoval, potom 1 sekundu spomaľoval, potom 10 sekúnd zrýchľoval a nakoniec 6 sekúnd spomaľoval. Po týchto 22 sekundách sa ocitol priamo na cieľovej čiare. Lahko si spočítame, že vtedy mal rýchlosť 8 m/s . To bola zhodou okolností zároveň aj najvyššia povolená rýchlosť v cieľi.

Ako dlhá je trať, ktorú Jožko takto prešiel?

Mohol Jožko prejsť túto istú trať aj rýchlejšie? Ak áno, ako to mal spraviť? Ak nie, prečo?

B-I-2 Nedočkavosť

1. Vieme, že v čase 0 sa o zadaniach olympiády dozvedia všetci žiaci K . Napíšte program, ktorý zistí, ktorí žiaci sa o zadaniach dozvedia v čase 1. Ktorí z týchto žiakov sa to v tomto čase dozvedeli prvýkrát?
2. Ako upravíte svoj program aby následne zistil aj to, ktorí žiaci sa o zadaniach dozvedeli po prvýkrát v čase 2?
3. Predstavme si, že sa v minúte x o zadaniach nedozvedel žiaden nový žiak. Dokážte, že ani v minúte $x+1$ sa o zadaniach nikto nový nedozvie.
4. Ak sa žiak K alebo n dozvie o zadaniach, hovorí o tom svojim susedom *každú* ďalšiu minútu. Z toho je však v triede veľký hluk. Ako by sa zmenilo šírenie informácie po triede, keby žiaci K a n povedali svojim susedom o zadaniach *iba raz* – na začiatku najbližšej minúty po tom, ako sa o nich dozvedeli?

B-I-3 Cesty v mriežke

Hanka si išla do obchodu kúpiť čokoládu, ktorá stojí S centov. So sebou má svoj mešec mincí, v ktorom je nepreberné množstvo mincí s hodnotou 1, 2, 5, 10 a 20 centov. Každého typu mincí je tam naozaj veľa, Hanka sa nemusí obávať, že by sa jej pri platení niektoré minuli. Keď pristúpila k pokladni, začala z mešca postupne jednu po druhej vykladať mince, až kým nevyložila mince v celkovej sume práve S centov.

Hanka teraz rozmýšľa, koľkými spôsobmi mohla vlastne S centov zaplatiť. Dva spôsoby pokladáme za rôzne, ak sa líšia v použitých minciach, aj ak boli mince vyložené v odlišnom poradí.

Pre $S = 5$ preto existuje až 9 spôsobov ako túto sumu zaplatiť: $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(1, 1, 2, 1)$, $(1, 2, 1, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$ a (5) .

1. Hanka si uvedomila, že počet spôsobov môže počítať postupne. Všeobecne ju totiž zaujíma nasledovná otázka: *Koľkými rôznymi spôsobmi viem zaplatiť X centov?* Vie, že pre $X = 0$ existuje len jedna možnosť (nezaplatiť nič – inými slovami, zaplatiť prázdnu množinou mincí). No a následne vie spočítať počet spôsobov pre $X = 1$, potom pre $X = 2$, atď. až po $X = S$.

Popíšte spôsob, akým vie Hanka spočítať počet spôsobov zaplataenia pre nejaké X , ak už pozná počet spôsobov zaplataenia všetkých cien menších ako X .



2. Nie vo všetkých krajinách majú mince rovnakých nominálnych hodnôt. Ako by sa zmenilo vaše riešenie predchádzajúcej úlohy, ak by Hanka mala k dispozícii 2, 3, 7 a 16-centové mince?
3. Vyťahovať z vrečka veľa mincí je otravné. Hanku by preto zaujímalo, koľkými spôsobmi môže (pomocou svojej pôvodnej sady mincí) zaplatiť sumu S centov, ak pritom použije **práve** 4 mince.
- Vyriešte túto úlohu „ručne“: pre každú sumu $S \geq 0$ zistíte hľadaný počet spôsobov. Viete nájsť aj šikovnejší postup ako len postupne vyskúšať úplne všetky možné štvorice mincí?
4. Hanka by teraz chcela riešiť všeobecnú verziu otázky z predchádzajúcej úlohy: *Koľkými rôznymi spôsobmi viem zaplatiť X centov použitím práve K mincí?*
- Vie, že pre $X = 0$ a $K = 0$ je odpoveď 1. Chcela by opäť nájsť nejaký postup, ako odpovede pre väčšie X a K šikovne spočítať pomocou odpovedí pre niektoré menšie hodnoty X a K . Ako vie takéto niečo robiť? A v akom poradí ich vlastne má počítať?
- Všimnite si, že v tejto úlohe to má Hanka ťažšie, lebo musí vedieť zistiť počet možností pre ľubovoľnú dvojicu X a K . Ak teda napríklad chce zaplatiť 5 centov práve 4 mincami, musí vedieť napríklad aj to, koľkými spôsobmi vie zaplatiť 3 centy s použitím práve 3 mincí.
5. Hanka sa opäť vrátila ku pôvodnej úlohe – znova ju teda zaujíma, koľkými spôsobmi vie pomocou svojej pôvodnej sady mincí zaplatiť sumu S (bez ohľadu na počet použitých mincí). Tentokrát ju však vôbec netrápi, v akom poradí mince vyloží, zaujíma ju iba sada vyložených mincí. To znamená, že napr. $(1, 1, 1, 1, 2)$ teraz považujeme za tú istú možnosť ako $(1, 1, 2, 1, 1)$. Pomôžte jej túto úlohu vyriešiť.
- Poradíme vám, že jedna možná správna otázka, ktorú sa Hanka musí snažiť zodpovedať, znie: *Koľkými rôznymi spôsobmi viem zaplatiť X centov, ak pri tom nepoužijem žiadnu mincu s hodnotou väčšou ako Y ?*

B-I-4 Krtko staviteľ

Pripomíname, že a^n je iba skrátený zápis pre n za sebou idúcich miestností typu a . Preto a^4 označuje to isté, čo zápis $aaaa$ a je možné použiť oba zápisy. Špeciálne a^0 je prázdna postupnosť miestností, tiež označovaná ϵ .

1. Hoci niektoré portfóliá môžu vyzeráť zložito, dá sa pre ne navrhnúť veľmi jednoduchá sada pravidiel. Nezabudnite, že vašou úlohou nie je minimalizovať počet pravidiel, ktoré má krtko k dispozícii. Vyžadujeme len, že tento počet musí byť *konečný*.
- Navrhните sadu pravidiel, ktorej portfólio je tvorené práve norami a^2 , a^3 , a^4 , a^{10} , a^{12} , a^{24} , a^{29} , a^{30} , a^{100} a a^{3457} .
- Pripomíname, že pri použití pravidla môže krtko postaviť ľubovoľne veľa dokončených miestností a najviac jednu nedokončenú.
2. Navrhните sadu pravidiel, ktorej portfólio je tvorené všetkými norami, ktoré sa skladajú iba z miestností typu a .
- Dajte si pozor, že takýchto norí je *nekonečne* veľa, krtkova sada pravidiel však musí obsahovať *konečný* počet pravidiel.
3. Navrhните sadu pravidiel, ktorej portfólio je tvorené všetkými norami tvaru a^n pre $n \geq 5$. Teda norami zloženými iba z miestností typu a , ktorých je navyše aspoň 5.
- Do tejto sady teda patrí nora $aaaaaaa$ alebo a^{100} , ale nepatrí tam nora aaa či $baaaaaa$.
4. Navrhните sadu pravidiel, ktorej portfólio je tvorené norami, v ktorých je najprv niekoľko (aj 0) miestností typu a a následne niekoľko (aj 0) miestností typu b . Do portfólia teda patrí napr. nora $aaaabb$, a^4b^{100} či dokonca $bbbb$, nepatrí tam však $abbaa$ a $baaaaaa$.
5. Navrhните sadu pravidiel, ktorej portfólio je tvorené norami, v ktorých je najprv aspoň 5 miestností typu a a následne aspoň 5 miestností typu b . Do portfólia teda patrí napr. nora a^5b^5 a nora $a^{42}b^{47}$, nepatrí tam však a^4b^{100} , b^5a^5 , ani a^7b^7c .
6. Navrhните sadu pravidiel, ktorej portfólio je tvorené všetkými norami zloženými z miestností a a b , ktoré **začínajú** miestnosťou a .
7. Navrhните sadu pravidiel, ktorej portfólio je tvorené všetkými norami zloženými z miestností a a b , ktoré **končia** miestnosťou a .