Priebeh krajského kola

Krajské kolo 38. ročníka Olympiády v informatike, kategória B, sa koná 19. januára 2023 v dopoludňajších hodinách. Na riešenie úloh majú súťažiaci **4 hodiny čistého času**. Rôzne úlohy riešia súťažiaci na samostatné listy papiera. Akékoľvek pomôcky okrem písacích potrieb (napr. knihy, výpisy programov, kalkulačky) sú zakázané.

Čo má obsahovať riešenie úlohy?

- Slovne popíšte algoritmus.
  Slovný popis riešenia musí byť jasný a zrozumiteľný i bez nahliadnutia do samotného algoritmu/programu.
- Zdôvodnite správnosť vášho algoritmu.
- Uveďte a zdôvodnite jeho časovú a pamäťovú zložitosť.
- Podrobne uveďte dôležité časti algoritmu, ideálne vo forme programu v nejakom bežnom programovacom jazyku (napr. C++, Python, Java, Pascal).
- V prípade, že používate vo svojom programovacom jazyku knižnice, ktoré obsahujú implementované dátové štruktúry a algoritmy (napr. STL pre C++), v popise algoritmu stručne vysvetlite, ako by ste napísali program s rovnakou časovou zložitosťou bez použitia knižnice.

Hodnotenie riešení

Za každú úlohu môžete získať od 0 do 10 bodov.

Pokiaľ nie je v zadaní povedané ináč, najdôležitejšie dve kritériá hodnotenia sú v prvom rade **správnosť** a v druhom rade **efektívnosť** navrhnutého algoritmu. Na výslednom počte bodov sa môže prejaviť aj kvalita popisu riešenia a zdôvodnenie tvrdení o jeho správnosti a efektívnosti.

Efektívnosť algoritmu posudzujeme vypočítaním jeho časovej zložitosti – funkcie, ktorá hovorí, ako dlho vykonanie algoritmu trvá v závislosti od veľkosti vstupných parametrov. Nezávisí pri tom na konštantných faktoroch, len na rádovej rýchlosti rastu tejto funkcie.

V zadaní úloh uvádzame časť „Hodnotenie“, v ktorej nájdete približné limity na veľkosť vstupných údajov. Pod pojmom „efektívne vyriešiť“ chápeme to, že váš program spustený na modernom počítači by mal dať odpoveď nanajvýš do niekoľkých sekúnd.

Údaje z tejto časti zadania by mali slúžiť hlavne na to, aby ste o riešení, ktoré vymyslíte, vedeli približne povedať, koľko bodov zaň dostanete.

B-II-1 Preteky v sánkovaní

Filip je veľký fanúšik športového sánkovania. Celý tento rok sa tešil na najväčšiu športovú udalosť – Olympiádu v sánkovaní. Tej sa tento rok zúčastnilo n pretekárov.
Pred olympiádou sa konalo viacero menších súťaží, do ktorých sa zapojili aj viacerí z budúcich olympionikov. Vďaka tomu sa už vedelo veľa o tom, kto má akú formu. Napríklad všetci vedeli, že Boris Borguľov je rýchlejší ako Adrián Allday a ten je zase rýchlejší ako Clint Cole. Je teda očakávané, že Boris predbehne Clinta. Clint nemá dobrú sezónu, lebo je od neho rýchlejší aj Dao Ding. Ako sa však umiestni Dao nikto ešte nevie predpovedať – nevieme, či bude mať na to, aby porazil okrem Clinta aj Adriána či dokonca aj Borisa.

Keď prišla samotná olympijská súťaž, Filipa čakalo sklamanie: mali v práci pohotovosť a tak priamy prenos zmeškal. Priateľka Miška mu po skončení súťaže poslala stručnú správu: „O nič si neprišiel, bola to nuda. Žiadne prekvapenie sa nekonalo.“ Filip teraz rozmýšľa, ako vlastne mohla súťaž dopadnúť a či sa Miška nemýlila.

Súťažná úloha

Olympiády v sánkovaní sa zúčastnilo n pretekárov, ktorých si pre jednoduchosť očíslujeme od 1 po n. Zo súťaží v priebehu roka poznáte m očakávaných výsledkov. Každý očakávaný výsledok je jedna dvojica ľudí x_i a y_i, o ktorej čakáme, že x_i by mal predbehnúť y_i.
Výsledková listina olympiády obsahuje poradie, v ktorom je všetkých n sánkarov zoradených od najrýchlejšieho po najpomalšieho. (Časy meriame tak presne, že rovnosť časov určite nenastane.) Toto poradie nepoznáte.
Miška tvrdí, že v poradí neboli žiadne prekvapenia – teda všetkých m očakávaní bolo naplnených. Pre každé i teda má súťažiaci x_i byť vo výslednom poradí skôr ako súťažiaci y_i.
Zistite, či existuje aspoň jedna postupnosť (presnejšie, permutácia) čísel 1 až n, ktorá spĺňa všetky očakávania. Ak nejaké takéto postupnosti existujú, nájdite ľubovoľnú z nich a vypíšte ju na výstup.

Formát vstupu a výstupu

Na prvom riadku vstupu sú dve celé čísla n a m – počet súťažiacich na olympiáde a počet očakávaní.
Nasleduje m riadkov, pričom i-ty z nich obsahuje dve čísla x_i a y_i ($1 \leq x_i, y_i \leq n$, $x_i \neq y_i$) popisujúce očakávanie, že súťažiaci číslo x_i predbehne súťažiaceho y_i.

Nájdite jednu postupnosť čísel 1 až n, ktorá spĺňa všetky očakávania, a vypíšte ju do jediného riadku výstupu. Ak hľadaná postupnosť neexistuje, vypíšte namiesto toho text `Miska sa myli`.

Obmedzenia a hodnotenie

Plných 10 bodov môžu získať riešenia, ktoré efektívne vyriešia ľubovoľný vstup, v ktorom platí $n, m \leq 10^6$.
Za riešenia, ktoré efektívne vyriešia ľubovoľný vstup s $n, m \leq 5000$ môžete získať najviac 6 bodov.
Za ľubovoľné správne riešenie získate aspoň 3 body.

Príklad

vstup

```
4 3
2 1
1 3
4 3
```

výstup

```
2 4 1 3
```

Toto je vstup zo zadania – Adrián je 1, Boris 2, Clint 3 a Dao 4. Existujú aj ďalšie správne postupnosti, ktoré môžete vypísať na výstup: $(4, 2, 1, 3)$ a $(2, 1, 4, 3)$.

vstup

```
3 2
1 2
2 1
```

výstup

```
Miska sa myli
```

O súťažiacom 3 nevieme žiadnu informáciu, môže byť ľubovoľne dobrý. Problémom však je, že o hráčoch 1 a 2 máme konfliktné informácie – 1 má poraziť 2 a 2 má poraziť 1. To sa zjavne nedá splniť.

B-II-2 Fúzna záhradka

Píše sa rok 2123 a Peťo sa rozhodol vytvoriť si v záhrade zátišie z fúznych minireaktorov. Zátišie pokladá Peťo za krásne vtedy, keď každý reaktor vyrába rovnako veľa energie. Inak totiž každý vrčí inak a to nie je estetické. Peťo však kupoval minireaktory v povianočnom výpredaji, preto má každý z nich iné parametre. Pre Peťa sú dôležité najmä dva z nich – *hodinová spotreba* a *maximálny výkon*. Na beh reaktoru je totiž potrebné mu dodať každú hodinu nejaké množstvo energie, čo určuje hodinová spotreba. Maximálny výkon zase hovorí, koľko najviac energie vie reaktor vyrobiť za hodinu behu. Každý reaktor sa dá nastaviť tak, aby vyrábal ľubovoľné množstvo energie neprekračujúce jeho maximálny výkon.
Peťo pozná tieto parametre pre všetkých n reaktorov, ktoré si kúpil. Teraz rozmýšľa, ktoré z nich chce použiť v svojom zátiší. Chce totiž, aby bolo zátišie pekné – všetky reaktory boli nastavené na rovnaký výkon – a zároveň celkový energetický výstup zátišia (t.j., jeho výkon mínus spotreba) bol čo najväčší. Pomôžete mu?

Súťažná úloha

K dispozícii máte n fúznych reaktorov. O každom z nich poznáte hodnoty s_i a v_i: hodinovú spotrebu a maximálny výkon. Vašou úlohou je určiť jednotný výkon e všetkých reaktorov v zátiší a potom vybrať nejakú podmnožinu reaktorov tak, aby platilo, že pre každý vybraný reaktor je $e \leq v_i$ (reaktor sa dá nastaviť tak, aby mal výkon e) a zároveň je celkový výstup zátišia čo najvyšší. Celkový výstup zátišia spočítate tak, že sčítate výkon každého vybraného reaktora (teda e krát počet vybraných reaktorov) a od toho odpočítate hodnoty s_i reaktorov v zátiší.

Formát vstupu a výstupu

Prvý riadok vstupu obsahuje číslo n označujúce počet Peťkovych minireaktorov. Nasleduje n riadkov, z ktorých i-ty obsahuje dve medzerou oddelené čísla s_i a v_i – hodinovú spotrebu a maximálny výkon i-teho reaktora. Reaktory sú číslované od 1 po n v poradí, v akom sa objavili na vstupe.

Na prvý riadok výstupu vypíšte hodnotu e, na ktorú ma Peťko nastaviť vybrané reaktory. Na druhý riadok vypíšte čísla reaktorov, ktoré si má vybrať. Ak existuje viacero optimálnych riešení, vypíšte ľubovoľné z nich.

Obmedzenia a hodnotenie

Plných 10 bodov môžu získať riešenia, ktoré efektívne vyriešia ľubovoľný vstup, v ktorom platí $n \leq 100\,000$.
Za riešenia, ktoré efektívne vyriešia ľubovoľný vstup s $n \leq 5000$, môžete získať najviac 5 bodov.
Za ľubovoľné správne riešenie získate aspoň 3 body.

Príklady

vstup

```
7
18 20
1 6
3 9
8 10
4 12
10 15
20 10
```

výstup

```
9
3 4 5
```

Vybrané tri reaktory dokopy vyrobia $3 \cdot 9 = 27$ energie a spotrebujú jej $3 + 8 + 4 = 15$, celkový výstup bude teda $27 - 15 = 12$ jednotiek energie. Žiadne iné rovnako dobré ani lepšie riešenie neexistuje.

Všimnite si ešte reaktor #7, ktorý spotrebuje viac energie ako vie vyrobiť.

vstup

```
3
2 3
2 3
1 5
```

výstup

```
3
1 2 3
```

Vybrali sme všetky tri reaktory, pre $e = 3$ spolu vyrobia 9 a spotrebujú $2 + 2 + 1 = 5$ jednotiek energie.

Existuje aj druhé optimálne riešenie. To vyzerá tak, že zvolíme $e = 5$ a vyberieme len tretí reaktor. Ten potom sám vyrobí 5 jednotiek energie a spotrebuje jednu. Obe tieto riešenia majú teda celkový výstup 4.

B-II-3 Čokoláda

Kubík si z výletu vo Švajčiarsku doniesol kopy orieškovej čokolády. Teda, ani nie tak kopy ako *kilometre* – jeho čokoláda je totiž obrovský pás pozostávajúci z n štvorčekov, pričom i-ty štvorček obsahuje a_i orieškov.
Hneď po príchode sa Kubík stretol s Hodoboxom, ktorý sa na čokoládu túžobne zahľadel. A keďže to bolo naozaj pridlho čokolády na jedného človeka, rozhodol sa Kubík podeliť.
Neboli by to však Kubík s Hodoboxom, keby si čokoládu rozdelili normálne. Namiesto toho sa rozhodli hrať nasledovnú hru.
V každom ťahu si hráč, ktorý je na rade, zoberie jeden štvorček **z každého zostávajúceho súvislého** kusu čokolády. Nemusí brať od kraja, môže si zobrať ľubovoľný zo štvorčekov, ktoré daný kus tvoria – aj taký, čo je niekde v strede.
Podľa toho, ako veľký kus máme a ktorý jeho štvorček vezmeme nám môže ostať nula kusov, jeden kratší kus alebo dva kratšie kusy. S tými sa bude ďalej hrať.
Ešte viac ako čokoládu majú Kubík s Hodoboxom radi oriešky. Každý z nich sa preto snaží dokopy zjesť čo najviac orieškov. Koľko najviac orieškov vie Kubík zjesť ak začína a obaja s Hodoboxom hrajú optimálne?

Súťažná úloha

Čokoláda pozostáva z n štvorčekov, pričom v i-tom z nich je a_i orieškov. Vašou úlohou je zistiť, koľko najviac orieškov vie zjesť Kubík, ak obaja chlapci hrajú tak, aby zjedli čo najviac orieškov.

Formát vstupu a výstupu

V prvom riadku vstupu dostanete číslo n udávajúce počet štvorčekov v čokoláde.
V ďalšom riadku nasleduje n medzerami oddelených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – počty orieškov v jednotlivých štvorčekoch. Môžete predpokladať, že $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq 10^9$.

Na výstup vypíšte jediné číslo – najväčší počet orieškov, ktoré vie Kubík zjesť, ak Kubík začína a obaja hrajú optimálne.

Obmedzenia a hodnotenie

Plných 10 bodov môžu získať riešenia, ktoré efektívne vyriešia ľubovoľný vstup, v ktorom platí $n \leq 500$.
Za ľubovoľné správne riešenie získate aspoň 5 bodov.

Príklad

vstup

```
8
1 3 1 100 2 3 2 50
```

výstup

```
106
```

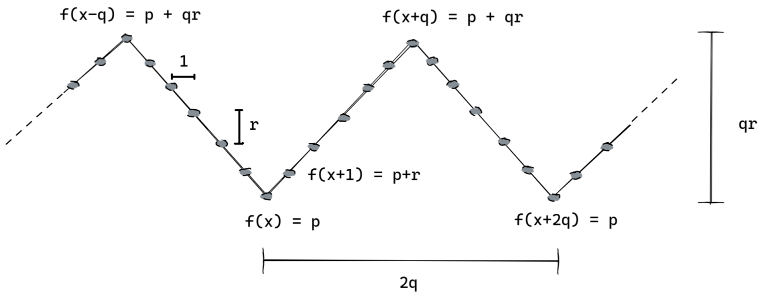
V prvom ťahu musí Kubík zobrať štvorček so 100 orieškami, ten rozhodne nemôže Hodoboxovi nechať.

V druhom ťahu dostane Hodobox dva kúsky čokolády: $(1, 3, 1)$ *a* $(2, 3, 2, 50)$*. Z každého z nich musí zobrať jeden štvorček. Z prvého zoberie ten s 3 orieškami, z druhého ten s 50 orieškami.*

Kubíkovi ostali kúsky (1), (1) *a* $(2, 3, 2)$*. Z prvých dvoch kúskov zje posledný ostávajúci štvorček. V treťom kúsku má na výber. Ak by Kubík zjedol štvorček 3, Hodobox by dostal dva samostatné štvorčeky a oba by zjedol. Lepšie je zjesť krajný štvorček. Napr. ak Kubík zje prvý štvorček (2 oriešky), Hodobox dostane kúsok* $(3, 2)$*. Z neho zje štvorček s 3 orieškami. Kubík potom doje posledný štvorček, čím sa mu dokopy podarilo zjesť až* $100 + 1 + 1 + 2 + 2 = 106$ *orieškov.*

B-II-4 Katakomby

Nedávno objavené egyptské texty odhalili polohu doposiaľ nepreskúmaných podzemných katakomb zasvätených bohovi Nehebkau. Tieto katakomby mali podľa starodávnych textov pravidelný vlnitý tvar, ktorý mal pripomínať Nehebkauove hadie telo.
Katakomby sa skladajú z množstva miestností, ktoré pri pohľade zhora ležia všetky v jednotkových rozostupoch na jednej priamke. Pri pohľade zboku by sme však zistili, že sa pravidelne mení ich hĺbka. Katakomby sa hadia striedavo hore a dole medzi dvoma hĺbkami. Ak práve klesajú, každá ďalšia je o r jednotiek hlbšie od predchádzajúcej, a ak práve stúpajú, každá ďalšia je naopak o r jednotiek vyššie ako predchádzajúca.
Katakomby menia smer (zo stúpania na klesanie a naopak) vždy po q miestnostiach. Ak teda označíme p nadmorskú výšku najhlbších miestností, potom najvyššie položené miestnosti majú nadmorskú výšku $p + qr$. Pri pohľade zboku teda katakomby vyzerajú približne takto:



Nanešťastie, v prastarých textoch sa nič nepíše o hodnotách p, q či r a nevieme ani, na ktorej zemepisnej šírke sa nachádzajú zlomové body, v ktorých sa mení smer.
Poznáme však miestneho šamana, ktorému môžeme opakovane zaplatiť desať libier, oznámiť mu konkrétnu vodorovnú súradnicu x a on nám odpovie, ako hlboko je miestnosť na tejto súradnici – hodnotu $f(x)$. Musíme mu však sľúbiť, že do miestnosti, na ktorú sme sa pýtali, nikdy nevkročíme.
Od miestnych úradov vieme získať povolenie na práve jeden výkop, musíme však vopred presne špecifikovať aj bod x, v ktorom chceme kopať, aj presnú nadmorskú výšku, po ktorú chceme kopať.
Ak správne určíme polohu nejakej miestnosti, môžeme sa do nej prekopať a získať vzácne poklady z katakomb. Keďže však máme len jeden pokus, musíme si ním byť úplne istí.
Koľko najmenej otázok sa musíme šamana spýtať, aby sme zaručene vedeli polohu nejakej miestnosti, na ktorú sme sa nepýtali?

Súťažná úloha

Existuje neznáma celočíselná funkcia f taká, že $f(x)$ zodpovedá nadmorskej výške miestnosti ležiacej na súradnici x. Táto funkcia je jednoznačne určená štyrmi **celými číslami**: p, q, r a s. Hodnota p určuje najnižšiu možnú nadmorskú výšku miestnosti, **kladná** hodnota q je počet krokov každého stúpania aj klesania, **kladná** hodnota r udáva vzdialenosť, o ktorú sa hĺbka miestnosti zmení v každom kroku, a hodnota s je jedna konkrétna súradnica, na ktorej sa nachádza najhlbšia miestnosť. (Hodnoty p a s sú ľubovoľné celé čísla.)
Formálne, neznáma funkcia f spĺňa nasledovné podmienky:

- pre $x \in \mathbb{Z}$ platí $|f(x) - f(x+1)| = r$ (rozdiel každých dvoch susedných hodnôt funkcie je presne r)
- pre $k \in \mathbb{Z}$ platí $f(s + 2kq) = p$ (na súradnici s a odtiaľ všade s krokom $2q$ sú najhlbšie miestnosti)
- pre $k \in \mathbb{Z}$ platí $f(s + q + 2kq) = p + qr$
(na súradnici $s + q$ a odtiaľ všade s krokom $2q$ sú najvyššie položené miestnosti)

Všimnime si, že z týchto podmienok vieme jednoznačne odvodiť, že vždy od $s + 2kq$ až po $s + q + 2kq$ musí funkcia stále rásť o r a na zvyšných úsekoch stále klesať o r.

Šamanovi môžete položiť niekoľko otázok tvaru: „Akú hodnotu má $f(x)$?“

Otázky kladiete postupne. Pri kladení každej otázky už teda viete odpovede na všetky skôr položené otázky, a aj na základe týchto odpovedí sa môžete rozhodnúť, na akú súradnicu x sa opýtate teraz.
Kedykoľvek sa môžete prestať pýtať. Akonáhle tak spravíte, musíte so stopercentnou istotou oznámiť nejakú súradnicu $x_\star$, na ktorú ste sa ešte nepýtali, a jej zodpovedajúcu hodnotu $y = f(x_\star)$.

Pripomíname, že hodnoty p, q, r a s nepoznáte. Vaše riešenie ich ani nemusí nutne odhaliť, naozaj stačí len nájsť jednu miestnosť katakomb.
Funkcia f je definovaná na všetkých celých číslach, šamana sa teda pokojne môžete opýtať aj na záporné x.

Podúloha A (5 bodov)

Nájdite a popíšte stratégiu, pomocou ktorej zaručene nájdete miestnosť, bez ohľadu na to, ako katakomby vyzerajú. Dokážte, že vaša stratégia funguje bez ohľadu na neznáme parametre p, q, r a s. Uveďte tiež, koľko otázok potrebuje vaša stratégia (v najhoršom prípade) šamanovi položiť. Stratégiu považujeme za tým lepšiu, čím je tento počet menší.
(U niektorých stratégii môže počet položených otázok závisieť od hodnôt p, q, r, s. Ak máte takéto riešenie, odhadnite, ako závisí váš počet otázok od týchto parametrov.)

Čím lepšiu stratégiu nájdete, tým viac bodov dostanete. Najviac 4 body môžete získať, ak vyriešite ľahšiu verziu úlohy, v ktorej je zaručené, že $r = 1$.

Podúloha B (4 body)

Zvoľte si čo najväčšie číslo n a preň dokážte, že neexistuje stratégia, ktorá dokáže s istotou nájsť miestnosť katakomb, ak sa musíme šamana opýtať menej ako n otázok.

Body za túto podúlohu dostanete na základe toho, pre ako veľké n sa vám takéto tvrdenie podarí dokázať.

Riešenie za 5+4 = 9 bodov v podúlohe A nájde stratégiu, pri ktorej nám vždy stačí nanajvýš n otázok a k tomu v podúlohe B pre tú istú hodnotu n dokáže, že menej ako n otázok nestačí.
Čiastočné body za horšie riešenia dostanete podľa toho, nakoľko sa k tomuto ideálnemu cieľu priblížite. Určite sa teda oplatí odovzdať ľubovoľnú funkčnú stratégiu (aj ak potrebuje veľa otázok) a tiež ľubovoľný korektný dôkaz, že nejaký počet otázok nestačí.

Podúloha C (+1 bod)

Desať bodov namiesto deviatich dostanete, ak namiesto (alebo navyše ku) dôkazu v podúlohe B dokážete silnejšie tvrdenie: pre tú istú konštantu n dokážte, že menej ako n otázok nestačí žiadnej stratégii dokonca ani vtedy, ak by nám niekto pred začiatkom hry zaručil, že $r = 1$.

TRIDSIATY ÔSMY ROČNÍK OLYMPIÁDY V INFORMATIKE

Príprava úloh: Michal Anderle, Jano Hozza, Paulína Smolárová, Timea Szöllősová
Recenzia: Michal Forišek
Slovenská komisia Olympiády v informatike
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2023