Toto sú návodné úlohy k domácemu kolu 35. ročníka Olympiády v informatike. Ide teda o sadu ľahších úloh, ktoré tematicky súvisia so súťažnými úlohami. Riešenie týchto úloh môže byť dobrou prípravou na riešenie súťažných úloh. Za riešenia týchto návodných úloh nie sú žiadne body do súťaže.

Návodné úlohy k domácemu kolu OI: kategória A

A-I-1 Po schodoch

1. Na vstupe je pole, v ktorom je pre každý deň za posledných 100 rokov zapísané množstvo zrážok. Napíšte program, ktorý toto pole načíta, vhodne predspracuje, a potom bude vedieť v konštantnom čase vypočítať množstvo zrážok za ľubovoľný časový interval.

2. Koľkými spôsobmi sa dá vyjsť hore n-schodovým schodiskom, ak v každom kroku môžeme stúpiť buď o jeden alebo o dva schody vyššie? A ako sa zmení odpoveď, ak by sme mohli robiť kroky aj o tri schody hore?

3. Koľkými spôsobmi sa dá vyskákať hore n-schodovým schodiskom, ak v každom skoku môžeme vyskočiť o ľubovoľne veľa schodov vyššie?

A-I-2 Nová bankovka

1. V Papierovom kráľovstve používajú bankovky s hodnotami $1, x, x^2, \dots, x^9$.

   Papierová Julka chce v obchode zaplatiť za nákup. Má dostatočnú zásobu bankoviek každej nominálnej hodnoty. Sumu, ktorú má zaplatiť, chce zaplatiť presne, a navyše najmenším možným počtom platidiel.

   Papierový Jožko jej poradil, aby postupovala pažravo a vždy použila tú bankovku, ktorá má (spomedzi všetkých, ktoré nie sú v danej chvíli priveľké) najväčšiu hodnotu.

   Má Jožko pravdu? Použije jeho postup vždy najmenší možný počet bankoviek, alebo existujú nejaké sumy, ktoré tento algoritmus nezaplatí optimálne? Svoje tvrdenie zdôvodnite

2. Skutočná Julka rieši ten istý problém v obchode v Banskej Bystrici. Samozrejme, bankovky a mince, ktoré používa pri platení, sú eurá.

   Funguje aj pre eurá Jožkova stratégia vždy optimálne? Prečo?

3. Koľko najmenej rôznych nominálnych hodnôt musia mať platidlá v krajine, v ktorej sa síce dá zaplatiť každú sumu, ale Jožkov algoritmus platenia nie je optimálny?

4. Dokážte alebo vyvráťte: ak máme n kartičiek a na každej napísané nejaké kladné celé číslo, vieme určite vybrať neprázdnu podmnožinu kartičiek so súčtom, ktorý je násobkom čísla n.

A-I-3 Rekonštrukcia mapy

1. Aký môže byť najmenší stupeň vrcholu v strome? Prečo?

2. Aký môže byť najväčší stupeň vrcholu v strome? Prečo?

3. Súčet stupňov vrcholov ľubovoľného grafu je párny. Prečo?

4. Dva grafy voláme izomorfné, ak vieme z jedného spraviť druhý tak, že len premenujeme vrcholy.

   Pre aké najmenšie n existujú dva n-vrcholové grafy, ktoré majú presne rovnakú sadu stupňov vrcholov, ale nie sú izomorfné?

A-I-4 Exaktné exponenciálne algoritmy

1. Okolo okrúhleho stola je n stoličiek. Koľko najviac ľudí si k nemu vie sadnúť, ak chceme, aby medzi každou dvojicou sediacich ľudí boli aspoň dve prázdne stoličky?

2. Fero nám sem nosí škatule, postupne jednu po druhej. Každá škatuľa má nejakú hmotnosť a nejakú nosnosť (oboje v kg). Ideme zo škatúľ stavať vežu, a to tak, že vždy zoberieme novú škatuľu, ktorú priniesol, a umiestnime ju na vrch doterajšej veže. Napíšte program, ktorý bude tento proces čo najefektívnejšie simulovať, až do okamihu, kedy sa veža preborí, lebo niektorej škatuli nebude stačiť nosnosť.

3. Vyriešte úlohu podobnú predchádzajúcej, s jednou zmenou: vežu tentokrát staviame tak, že vždy existujúcu vežu nadvihneme a pod ňu zasunieme škatuľu, ktorú Fero práve priniesol.

4. (Bonus pre súťažiacich s ambíciou postúpiť na IOI) Vyriešte efektívne tú istú úlohu s tým, že ku každej škatuli vám Fero povie nejaké prirodzené číslo (aké sa mu práve zachce) a vy tú škatuľu musíte do veže umiestniť ako toľkú zhora.

Návodné úlohy k domácemu kolu OI: kategória B

B-I-1 Kamenná cesta

1. Na vstupe je reťazec tvorený n znakmi `+` a `-`, kde `+` predstavuje kameň v rieke a `-` predstavuje kameň, ktorý už je potopený. Napíšte program, ktorý zistí, či vie Emo (podľa pravidiel v zadaní súťažnej úlohy) cez túto rieku prejsť.

2. Upravte riešenie predchádzajúcej úlohy tak, aby váš program aj vypočítal, koľko najmenej krokov musí Emo spraviť, ak vie prejsť cez rieku.

3. Upravte riešenie predchádzajúcej úlohy tak, aby v situáciách, v ktorých Emo cez rieku prejsť nevie, vypočítal najmenšiu dĺžku kroku, s ktorou sa už dotyčnú rieku prejsť dá. (Dĺžka kroku k znamená, že z kameňa číslo x vieme spraviť krok až na kameň číslo $x + k$.)

B-I-2 Baliaci papier

1. Koľko rôznych obdĺžnikov sa dá vystrihnúť, ak má Anička neporušený baliaci papier obdĺžnikového tvaru s rozmermi $r \times s$?

   Koľko z nich je maximálnych (podľa definície v zadaní súťažnej úlohy)?

2. Koľko rôznych obdĺžnikov sa dá vystrihnúť, ak má Anička baliaci papier „trojuholníkového" tvaru? (Teda keď máme vstup, v ktorom pre každé i platí $p_i = s + 1 - i$?)

   Koľko z nich je maximálnych?

3. Koľkými spôsobmi vieme na štvorcovej sieti rozmerov $r \times s$ vyznačiť nejaký obdĺžnik? Obdĺžniky, ktoré sa jeden od druhého líšia len posunutím, tentokrát považujeme za rôzne.

4. Na niektorých políčkach nekonečnej štvorcovej siete rastú jahody. My si smieme oplotiť oblasť rozmerov 100×100. Samozrejme, chceme, aby obsahovala čo najviac políčok s jahodami.

   Dokážte alebo vyvráťte: vždy existuje optimálne riešenie, v ktorom nejaké jahody rastú tesne pri nami postavenom plote.

B-I-3 Mravčia farma

1. Vyriešte ešte ľahšiu verziu súťažnej úlohy, v ktorej je zaručené, že Ferdo robí kroky len dodola.

2. Majme mravčiu farmu z ľahšej alternatívy súťažnej úlohy. Sme na úrovni 42 v komôrke číslo 47. Aké číslo má komôrka, do ktorej vedie chodbička dohora? Aké číslo majú dve komôrky, do ktorých vedú chodbičky dodola?

3. Dokážte alebo vyvráťte: ak bol posledný Ferdov pohyb dohora, tak vieme jednoznačne určiť, kde musel skončiť.

4. Roman si zobral figúrku Ferda. Umiestnil ju na miesto, kde skutočný Ferdo začínal. Následne si začal čítať svoje poznámky o Ferdovom pohybe a hýbal podľa nich figúrkou. Pritom vždy, keď Ferdo išiel dodola, si Roman náhodne vybral jednu z chodbičiek. Mal šťastie a naozaj sa mu takto podarilo odsimulovať všetky pohyby Ferda. Skončil na úrovni 17 v komôrke číslo 26.

   Roman potom znova presunul figúrku na miesto, kde skutočný Ferdo začínal. Znova prečítal svoje poznámky o Ferdovom pohybe a podľa nich vždy pohol figúrkou dohora alebo náhodne dodola. Opäť sa mu podarilo odsimulovať všetky pohyby Ferda.

   Čo viete povedať o tom, na ktorých úrovniach mohol skončiť?

   A ak viete, že skončil v komôrke číslo 30, čo ešte viete povedať o tom, kde všade inde mohol skončiť?

B-I-4 Domy na lúke

Vo všetkých návodných úlohách platia tie isté predpoklady ako v zadaní súťažnej úlohy: všetky cesty ležia v rovine a každá spája nejakú inú dvojicu domov.

1. Na lúke sú tri domy a tri studne. Môže mať každý dom postavenú cestu ku každej studni tak, aby sa žiadne dve cesty nekrižovali?

2. Na lúke je šesť domov. Koľko najviac ciest sa dá medzi nimi postaviť tak, aby sa žiadne dve nekrižovali?

3. Na lúke je 110 domov. Dá sa postaviť cesty tak, aby pri každom dome končilo presne 100 ciest a žiadne dve cesty sa nekrižovali?

4. Na povrchu lopty sú namaľované tri domy a tri studne. Po povrchu lopty môžeme teraz kresliť cesty. Zmení sa nejak riešenie prvej návodnej úlohy? Ako, resp. prečo?

5. Na povrchu pneumatiky (presnejšie, duše z pneumatiky od traktoru) sú namaľované tri domy a tri studne. Po povrchu tejto pneumatiky môžeme teraz kresliť cesty. Zmení sa nejak riešenie prvej návodnej úlohy? Ako, resp. prečo?