

Komentáre k úlohe Tulipány

Michal „mišof“ Forišek

15. 2. 2019

1 Bodovanie

Medzi odovzdanými riešeniami bolo mnoho pokusov o pažravé riešenie, ale ani jeden z nich nebol funkčný.

Nefunkčné riešenia by sme teoreticky mohli hodnotiť nulou, v tomto prípade by to však bolo zbytočne kruté. Navyše medzi rôznymi pažravými riešeniami boli veľké rozdiely: zatiaľ čo niektoré len uviedli samotný postup (a to často dosť vágne a nejednoznačne), iné mali dokázateľne správne časti a aj tomu zodpovedajúce dôkazy.

Na záver som preto hodnotenie úlohy zvolil nasledovne:

- Riešenia využívajúce hrubú silu mohli získať nanajvýš 4 body.
- Nefunkčné pažravé riešenia mohli získať nanajvýš 4 body, a to za časti, ktoré vždy fungujú, a za dôkazy, že tomu tak je. Príklady takýchto postupov sú v častiach 3.1 a 3.2.
- Kombináciou oboch predchádzajúcich typov riešení sa dalo získať nanajvýš 6 bodov.
- Riešenia dynamickým programovaním dostali veľa bodov aj ak neboli úplne správne, ak som bol presvedčený, že ide o ľahko opravitelnú chybu (a o tom som bol presvedčený vo všetkých takých prípadoch).

2 Čo nefunguje

Tu je niekoľko častých chýb – pažravých postupov, ktoré nefungujú.

Keď vidím vedľa seba dve párne skupiny, chcel by som dať medzi ne tulipán a „zabiť dve muchy jednou ranou“. Nie vždy je ale toto optimálne (hoci ste mnohí bez dôkazu tvrdili, že zjavne áno).

Príklad: TT.T.TT.TT.T.TT má optimálne riešenie s tulipánmi všade len nie v strede.

Iný príklad: .T.T.TT.T.TT.TT.T.TT.T.T. má jediné optimálne riešenie bez tulipánu v strede (so štyrmi tulipánmi na iných voľných miestach najbližších k stredu).

Nemôžeme sa len tak lokálne pre párnú skupinu rozhodnúť, či je výhodnejšie dať jej tulipán vľavo alebo vpravo.

Napríklad v $.T.TT.TTTT.T.T.T.$ pre skupinu dĺžky 2 síce platí, že predĺžiť ju doľava stojí dva tulipány a doprava len jeden, no v skutočnosti je optimálne pridať tie dva tulipány doľava a potom môcť inú párnú skupinu prerobiť na nepárnú lacnejšie.

3 Čo funguje?

3.1 Vynútené tulipány na krajoch

Ak máme na kraji medzeru, sme spokojní. Ak máme na kraji skupinu tulipánov, ideme od toho kraja a robíme vynútené operácie:

- Kým stretáme nepárnú skupinu a za ňou jednu medzeru, nič nerobíme.
Toto je zjavne správne, lebo keby sme tam ten tulipán dali, tak na konci keď budeme mať hotové riešenie a ten tulipán odstránime, tak tým rozbijeme jednu nepárnú skupinu na dve menšie nepárne skupiny, a teda máme opäť platné a lepšie riešenie.
- Keď stretneme párnú skupinu, dáme za ňu tulipán. (Toto musíme, keďže dať tulipán pred ňu nepomáha, spojením s predošlou nepárnou skupinou zase vznikne párna.) Následne znova spracujeme skupinu (či už párnú alebo nepárnú), ktorá takto vznikla.

Ak prideme až na koniec, sme hotoví. Inak vyrobíme vstup, kde je najskôr niekoľko blokov tvaru (nepárna skupina, jedna medzera), potom druhá medzera a potom zvyšok vstupu.

V tejto chvíli je jasné, že tulipány už budeme pridávať len do časti „druhá medzera a zvyšok vstupu“. (Na ľavej z dvoch po sebe idúcich medzier, ktoré sme práve našli, sa nikdy neoplatí mať tulipán.) Nepárne skupiny z kraja vstupu teda môžeme zahodiť.

Túto istú úvahu zopakujeme aj od druhého kraja.

Na konci prvého kroku teda máme stále tú istú úlohu ako na začiatku, ale tentokrát máme navyše záruku, že vstup začína aj končí aspoň jedným voľným miestom.

3.2 Tri a viac medzier

Kdekoľvek vidíme tri a viac medzier za sebou, môžeme vstup rozdeliť na dve nezávislé časti, pričom každej ostane jedna krajná medzera z tohto úseku. V optimálnom riešení totiž na tie ostatné medzery nikdy nedáme tulipán.

Dôkaz: Ak máme ľubovoľné riešenie, kde sú na všetkých týchto medzerách nové tulipány, môžeme ich všetky zmazať a na každý kraj pridať najviac jeden podľa potreby. Ak máme riešenie, kde ľavý a pravý kraj patria do rôznych skupín, môžeme obe skupiny skrátiť na nanajvýš jeden tulipán a zmazať všetko

medzi nimi. V oboch prípadoch sme nezväčšili počet tulipánov a zároveň sme zabezpečili, že všetky medzery okrem krajných sú prázdne.

Podobnú úvahu vieme spraviť aj ak vstup začína alebo končí viac ako jednou medzerou.

Na konci tohto kroku teda máme záhon, ktorý začína a končí práve jednou medzerou a v ktorom sú medzi každými dvoma skupinami tulipánov nanajvýš dve medzery.

3.3 Úseky s jednou medzerou medzi skupinami

Ak mám úsek, ktorý začína a končí jednou medzerou a takisto v ňom máme jednu medzeru medzi každými dvoma skupinami tulipánov, môžem postupovať nasledovne: pre medzeru na začiatku sa rozhodnem, či ju zaplním alebo nie. Bez ohľadu na to, ako som sa rozhodol, je teraz (postupujúc zľava doprava) jednoznačne určené, či v optimálnom riešení vyplniť alebo nevyplniť každú zo zvyšných medzier.

Ak teda máme úsek, ktorý nikdy neobsahuje tri a viac medzier za sebou, vieme ho vyriešiť v čase exponenciálnom len od počtu dvojíc po sebe idúcich medzier.

(A ak si následne predstavíme, že každý úsek bez troch medzier sme rozdelili na podúseky tak, že sme každú dvojicu medzier rozstihli, tak úvahou o tom, ako optimálne na seba nadväzujú riešenia pre jednotlivé podúseky, sa dalo prísť aj k 10-bodovému riešeniu. Touto cestou sa už ale nik nepustil.)