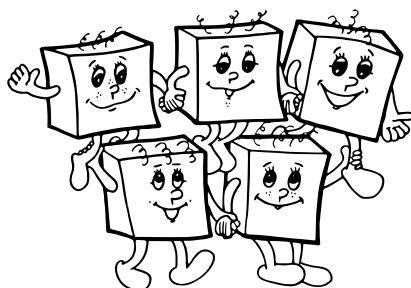


# OLYMPIÁDA V INFORMATIKE NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

<http://oi.sk/>



**tridsiaty prvý ročník**  
školský rok 2015/2016  
**zadania krajského kola**  
**kategória B**

## Priebeh krajského kola

Krajské kolo 31. ročníka Olympiády v informatike, kategória B, sa koná 19. januára 2016 v dopoludňajších hodinách. Na riešenie úloh majú súťažiaci **4 hodiny čistého času**. Rôzne úlohy riešia súťažiaci na samostatné listy papiera. Akékoľvek pomôcky okrem písacích potrieb (napr. knihy, výpisy programov, kalkulačky) sú zakázané.

## Čo má obsahovať riešenie úlohy?

- Slovné popíšte algoritmus.  
Slovný popis riešenia musí byť jasný a zrozumiteľný i bez nahliadnutia do samotného algoritmu/programu.
- Zdôvodnite správnosť vášho algoritmu.
- Uveďte a zdôvodnite jeho časovú a pamäťovú zložitosť.
- Podrobne uveďte dôležité časti algoritmu, ideálne vo forme programu v Pascale alebo C/C++.
- V prípade, že používate vo svojom programovacom jazyku knižnice, ktoré obsahujú implementované dátové štruktúry a algoritmy (napr. STL pre C++), v popise algoritmu stručne vysvetlite, ako by ste napísali program s rovnakou časovou zložitosťou bez použitia knižnice.

## Hodnotenie riešení

Za každú úlohu môžete získať od 0 do 10 bodov.

Pokiaľ nie je v zadaní povedané ináč, najdôležitejšie dve kritériá hodnotenia sú v prvom rade **správnosť** a v druhom rade **efektívnosť** navrhnutého algoritmu. Na výslednom počte bodov sa môže prejaviť aj kvalita popisu riešenia a zdôvodnenie tvrdení o jeho správnosti a efektívnosti.

Efektívnosť algoritmu posudzujeme vypočítaním jeho časovej zložitosti – funkcie, ktorá hovorí, ako dlho vykonanie algoritmu trvá v závislosti od veľkosti vstupných parametrov. Nezávisí pri tom na konštantných faktoroch, len na rádovej rýchlosti rastu tejto funkcie.

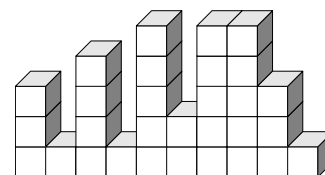
V zadaní úloh uvádzame časť „Hodnotenie“, v ktorej nájdete približné limity na veľkosť vstupných údajov. Pod pojmom „efektívne vyriešiť“ chápeme to, že váš program spustený na modernom počítači by mal dať odpoveď nanajvýš do niekoľkých sekúnd.

Údaje z tejto časti zadania by mali slúžiť hlavne na to, aby ste o riešení, ktoré vymyslíte, vedeli približne povedať, koľko bodov zaň dostanete.



## B-II-1 Múr

V Krajine Strašných Pohrôm sa kedysi šírila nákazlivá choroba. Obyvatelia vtedy zastavili jej postup tak, že narýchlo postavili múr z kociek, ktorý krajinu rozdelil na chorú a zdravú oblasť. Toto riešenie naozaj fungovalo a epidémia po chvíli ustala. Ostala však otázka: Čo s múrom? Bola by z neho turistická atrakcia, to by však nesmel byť taký škaredý a nepravidelný. Rozhodli sa preto, že ho zarovnajú.



### Súťažná úloha

Múr sa skladá z  $n$  stĺpcov rovnakých kamenných kociek. Všetky stĺpce stoja v rade jeden vedľa druhého. Na vstupe dostanete postupnosť čísel  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , kde  $a_i$  udáva počet kociek v  $i$ -tom stĺpci zľava. Môžete predpokladať, že celkový počet kociek, z ktorých sa skladá múr, je deliteľný dĺžkou múru, čiže číslom  $n$ .

**Podúloha A (2 body).** Napíšte program, ktorý zistí, koľko najmenej kociek treba presunúť (každú z ľubovoľného stĺpca na ľubovoľný iný), aby bol každý z  $n$  stĺpcov tvorený rovnakým počtom kociek.

**Podúloha B (8 bodov).** Presunutie jednej kocky o jeden stĺpec doľava alebo doprava stojí 1 euro. Napíšte program, ktorý vypočíta, ako najlacnejšie vieme vyrobiť múr tvorený  $n$  rovnako vysokými stĺpcami.

V podúlohe B nie je nutné pohnúť najmenším možným počtom kociek, zaujíma nás len celková cena presunov. V oboch podúlohách takisto nezabudnite uviesť dôkaz správnosti vašeho riešenia.

### Formát vstupu a výstupu

V prvom riadku vstupu bude celé číslo  $n$ : počet stĺpcov kociek. V druhom riadku budú celé čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Na výstup vypíšte jedno číslo – odpoveď pre príslušnú podúlohu. (V nižšie uvedených príkladoch vstupu a výstupu uvádzame vo výstupe vždy najskôr riešenie podúlohy A a potom riešenie podúlohy B.)

### Hodnotenie

Riešenie za 10 bodov si na bežnom počítači poradí so vstupom kde platí, že  $n \leq 1\,000\,000$  a  $a_1, \dots, a_n \leq 10^9$ . V podúlohe B dostanete:

- najvyššie 6 bodov za riešenie, ktoré by fungovalo pre  $n \leq 1\,000$  a  $a_1, \dots, a_n \leq 10^9$
- najvyššie 5 bodov za riešenie fungujúce pre  $n \leq 100$  a  $a_1 + \dots + a_n \leq 10\,000$
- najvyššie 3 body za ľubovoľné pomalšie ale korektné riešenie.

Ak uvediete korektné riešenie bez dôkazu správnosti, strhneme vám časť bodov. Nekorektné riešenia podúlohy B (teda také, ktoré občas nájdú iný ako najlacnejší spôsob úpravy múru) budú hodnotené najvyššie jedným bodom.

### Príklady

vstup

```
5
1 2 3 4 5
```

výstup

```
3
10
```

Tento vstup popisuje stenu tvorenú  $n = 5$  stĺpcami, v ktorých je postupne 1, 2, 3, 4 a 5 kociek.

Jedno optimálne riešenie podúlohy A: presunieme jednu kocku zo štvrtého do druhého stĺpca a dve kocky z piateho do prvého stĺpca. Dokopy sme presunuli  $1 + 2 = 3$  kocky. Na konci sú v každom stĺpci práve 3 kocky. Vyššie popísané riešenie je aj optimálnym riešením podúlohy B. Zaplatíme zaň  $2 + 4 + 4 = 10$  eur.

vstup

```
5
1 1 6 1 1
```

výstup

```
4
6
```

Z tretieho stĺpca presunieme po jednej kocke na všetky ostatné. To sú 4 presunuté kocky. Za vyššie uvedené presuny zaplatíme  $2 + 1 + 1 + 2 = 6$  eur. Žiadne lacnejšie riešenie neexistuje.



vstup

```
4
8 1 2 1
```

výstup

```
5
10
```

## B-II-2 Miešanie kariet

Kleofáš vymyslel stroj na miešanie kariet. Stroj má v hornej časti otvor, do ktorého Kleofáš strčí balíček  $n$  kariet. Potom potočí kľukou, stroj karty zamieša a vráti zamiešaný balíček. Stroj pri tom karty mieša vždy rovnako: pre každú pozíciu v balíčku je jednoznačne určené, kam sa po zamiešaní dostane karta, ktorá bola pred zamiešaním na tejto pozícii.

Kleofáš sa teraz zabáva tým, že jeden balíček kariet dookola mieša na svojom stroji.

### Súťažná úloha

Miešanie Kleofášovým strojom môžeme formálne popísať pomocou čísla  $n$  a permutácie čísel 1 až  $n$ , teda takej postupnosti  $a_1, a_2, \dots, a_n$  čísel od 1 do  $n$ , v ktorej sa každé z čísel 1 až  $n$  vyskytuje práve raz. Pre každé  $x$  od 1 do  $n$  potom platí, že karta, ktorá bola pred zamiešaním  $x$ -tá zhora, bude po zamiešaní  $a_x$ -tá zhora.

Nech sa  $n = 5$ . Označme si karty v balíčku A B C D E, pričom karta A je prvá zvrchu. Permutácia  $a_1, a_2 \dots a_5$ , ktorá popisuje miešanie vyzerá nasledovne: (2, 5, 1, 4, 3). Po jednom zamiešaní sa karta A dostane na druhú pozíciu, karta B na piatu, karta C na prvú, karta D sa neposunie a karta E pôjde na tretiu pozíciu. Balíček po jednom zamiešaní teda vyzerá C A E D B. Po druhom zamiešaní by boli karty usporiadané E C B D A.

**Podúloha A (4 body).** V balíčku kariet je práve jedno srdcové eso. Kleofáš vie, že na začiatku je toto eso  $r$ -té zvrchu. Zistite, či sa srdcové eso po nejakom počte zamiešaní dostane na vrch balíčka. Ak áno, vypočítajte, po koľkých zamiešaniach táto udalosť nastane prvýkrát.

**Podúloha B (6 bodov).** Tentokrát Kleofáša zaujímajú až dve karty: srdcové eso a srdcový kráľ. Obe karty sú v balíčku práve raz, pričom srdcové eso je na začiatku  $r$ -té zvrchu a srdcový kráľ je  $s$ -tý zvrchu. Zistite, či po nejakom počte zamiešaní nastane taká situácia, v ktorej je srdcové eso na vrchu balíčka a srdcový kráľ je hneď pod ním, teda druhý odvrchu. Ak áno, zistite tiež, po koľkých zamiešaniach sa to stane prvýkrát.

### Formát vstupu a výstupu

Pre obe podúlohy platí, že na prvom riadku je číslo  $n$  a na druhom riadku je  $n$  medzerami oddelených čísel  $a_1, a_2 \dots a_n$ . Všetky čísla  $a_1$  až  $a_n$  sú rôzne a platí, že  $1 \leq a_1 \dots a_n \leq n$ .

V podúlohe A je na treťom riadku jedno číslo  $r$  ( $1 \leq r \leq n$ ) – pozícia srdcového esa. V podúlohe B sú na treťom riadku dve čísla  $r$  a  $s$  ( $1 \leq r, s \leq n$ ) – pozície srdcového esa a srdcového kráľa.

V oboch podúlohách vypíšte na prvý riadok text „ano“ alebo „nie“ (bez úvodzoviek) podľa toho, či môže nastať situácia popísaná v zadaní podúlohy. Ak je odpoveď „ano“, na druhý riadok vypíšte najmenší počet zamiešaní, po ktorých táto situácia nastane.

### Hodnotenie

V podúlohe A môže každé korektné riešenie (podľa kvality popisu) získať až 2 body.

Za riešenie, ktoré na bežnom počítači do sekundy vyrieši každý vstup kde  $n \leq 1000$ , môžete získať až 3 body.

Plné 4 body môžete získať za riešenie, ktoré zvládne rýchlo vyriešiť každý vstup, v ktorom  $n \leq 1\,000\,000$ .

Aj v podúlohe B môže každé korektné riešenie získať až 2 body.

Riešenie, ktoré vyrieši do sekundy ľubovoľný vstup kde  $n \leq 100$ , môže získať až 3 body.

Za riešenie, ktoré vyrieši do sekundy každý vstup kde  $n \leq 1000$ , môžete získať až 4 body.

Plných 6 bodov môžete získať za riešenie, ktoré zvládne rýchlo vyriešiť každý vstup, v ktorom  $n \leq 1\,000\,000$ .



### Príklady pre podúlohu A

vstup

```
5
3 4 5 2 1
3
```

výstup

```
ano
2
```

Eso si označíme písmenom A, ostatné karty číslami 1 až 4 v poradí, v akom sú v balíčku. Pred prvým zamiešaním boli karty v tomto poradí (zhora nadol):

1 2 A 3 4

Po prvom zamiešaní boli v poradí:

4 3 1 2 A

Po druhom zamiešaní boli v poradí:

A 2 4 3 1

vstup

```
4
2 3 1 4
4
```

výstup

```
nie
```

Keďže  $a_4 = 4$ , eso sa pri miešaní nepohne z miesta, preto sa nikdy nedostane na vrch kopy.

vstup

```
4
2 3 1 4
1
```

výstup

```
ano
0
```

### Príklady pre podúlohu B

vstup

```
8
3 8 6 2 5 1 4 7
3 2
```

výstup

```
ano
8
```

vstup

```
5
2 3 4 5 1
1 3
```

výstup

```
nie
```



### B-II-3 Viac pokazených kalkulačiek

V domácom kole sme spoznali kamarátky Janku a Zuzku, ktoré mali pokazené kalkulačky. Pripomeňme si, že šlo o jednoduché kalkulačky, ktoré nepoznali prioritu operátorov a jednoducho ich vyhodnocovali v tom poradí, v akom boli zadané. Keď teda napíšete do takejto kalkulačky  $6+3/3=$ , výsledkom bude 3, nie 7.

Naše kalkulačky ďalej vedia zobrať výsledok jedného výpočtu a použiť ho pri ďalšom výpočte. Napríklad postupnosť kláves  $1+1=+1=$  vyrobí na displeji číslo 3. (Po prvom stlačení  $=$  bude na displeji 2, takže následné stlačenie  $+1$  vlastne vyrobilo vzorec  $2+1$ .)

Samozrejme, k výsledku na displeji sa nedajú pridať ďalšie cifry. Teda napr. postupnosť kláves  $1+1=47$  vyrobí na displeji číslo 47, nie číslo 247.

Na Jankinej kalkulačke už funguje len tlačidlo AC (ktoré všetko zmaže a na displeji nechá nulu) a tlačidlá  $46+-*/=$ . Vie teda písať cifry 4 a 6, sčítať, odčítať, násobiť a deliť. Môže napríklad do kalkulačky zadať výraz  $66/4=$  a na displeji si prečítať, že výsledok je 16.5.

#### Podúloha A (2 body).

Janka práve dokončila nejaký výpočet, stlačila  $=$  a na displeji jej kalkulačky sa zjavilo nejaké číslo  $x$ . Janka však displej zakryla a číslo  $x$  ti neukázala.

Nájdí postupnosť tlačidiel, ktoré keď Janka následne stlačí, tak sa na displeji zjaví číslo  $x + 13$ . Hľadaná postupnosť musí fungovať bez ohľadu na to, akú hodnotu má číslo  $x$ .

#### Podúloha B (1 bod).

Mirko má tiež pokazenú kalkulačku. Na tej jeho okrem tlačidla AC fungujú už len tlačidlá  $2-*=-$ . Vie Mirko na displeji vyrobiť číslo 47?

#### Podúloha C (3 body).

Mirko chce na displeji svojej kalkulačky vyrobiť číslo 1234. Poradte mu, ako to má spraviť na čo najmenej stlačení tlačidiel. (Plný počet bodov za túto podúlohu dostane ľubovoľné riešenie, ktoré to zvládne na menej ako 40 stlačení.)

#### Podúloha D (1 bod).

Aj Tomáš má pokazenú kalkulačku. Tomášova kalkulačka mala kedysi pamäť a tlačidlá, ktorými sa s ňou dalo manipulovať. Z týchto tlačidiel však už funguje len tlačidlo MR, ktorým sa vyvolá hodnota uložená v pamäti. Touto hodnotou je hodnota  $-2$  (mínus dva). Okrem tlačidla MR už fungujú len tlačidlá C, +, \* a /. (Tlačidlo C zmaže všetko okrem obsahu pamäte.)

Príklad: postupnosť kláves  $MR+MR=$  vyrobí na displeji číslo  $-4$ .

Ukážte postup, ktorým Tomáš na displeji svojej kalkulačky vyrobí číslo 3.

#### Podúloha E (3 body).

Ukážte, že Tomáš vie na displeji svojej kalkulačky vyrobiť ľubovoľné celé číslo od  $-1\,000\,000$  po  $1\,000\,000$ , pričom na to potrebuje menej ako 500 stlačení tlačidiel.



## B-II-4 Regulárne výrazy

Posledná úloha je opäť o regulárnych výrazoch, s ktorými ste sa stretli v domácom kole. Dúfame, že sa vám zapáčili, začali ste ich používať a teraz sú z vás už majstri. Ak by ste sa však na ne potrebovali rozpamätať, môžete si prečítať študijný text uvedený na nasledujúcej strane. (Tento text je rovnaký ako v domácom kole.)

### Dôležité upozornenie

Pri riešení súťažných úloh krajského kola smiete používať len syntax uvedenú v študijnom texte – teda **je zakázané** používať čokoľvek iné, čo možno poznáte z regulárnych výrazov používaných v praxi.

### Súťažná úloha

Súťažná úloha má niekoľko podúloh. V každej podúlohe budete mať slovné popísanú nejakú skupinu reťazcov. Vaším cieľom bude napísať vzorku, ktorej zodpovedajú všetky popísané reťazce a žiadne iné a slovné zdôvodniť, prečo je tomu tak.

**Podúloha A (2 body).** Železničná spoločnosť by chcela skontrolovať, či sú v ich databáze uložené správne popisy radenia vlakov. Vlak sa skladá z nasledovných vozňov:

- jedna alebo dve lokomotívy („L“),
- ľubovoľný (aj nulový) počet vozňov prvej triedy („1“),
- ľubovoľný (aj nulový) počet vozňov druhej triedy („2“),
- najviac jeden jedáľenský vozeň („J“),
- najviac jeden vozeň pre cestujúcich s deťmi („D“),
- ľubovoľný (aj nulový) počet poštových vozňov („P“).

Lokomotívy musia byť na začiatku, poštové vozne na konci. Ostatné vozne môžu byť v ľubovoľnom poradí, až na jednu podmienku: Musí sa dať prejsť medzi všetkými vozňami druhej triedy, jedáľenskými aj detskými vozňami bez toho, aby sme prechádzali vozňami prvej triedy.

Medzi správne popisy vlaku patria napríklad nasledovné reťazce: „LL11DJ22222“ , „L2222P“ , „L22D22J211“ alebo „L“. Všimnite si, že nie vždy sú všetky rovnaké vozne pri sebe. Popisy „LJ11222“ alebo „P2222L“ správne nie sú.

Napište vzorku, ktorej zodpovedajú práve všetky správne popisy radenia vlaku.

**Podúloha B (1 bod).** Napište vzorku, ktorej zodpovedajú všetky postupnosti znakov zodpovedajúce **aspoň jednej** zo vzoriek „ $b^*(ab^*ab^*)^*$ “ a „ $(a|b)^*b(a|b)^*b(a|b)^*$ “.

Výslednej vzorke by teda mali zodpovedať napr. reťazce „aab“ a „babbba“, ale nie reťazec „ab“.

**Podúloha C (4 body).** Napište vzorku, ktorej zodpovedajú všetky postupnosti znakov zodpovedajúce **obom** vzorkám: aj „ $b^*(ab^*ab^*)^*$ “, aj „ $(a|b)^*b(a|b)^*b(a|b)^*$ “.

Medzi takéto reťazce patrí napríklad „babbba“. Reťazec „aab“ medzi ne nepatrí.

**Podúloha D (3 body).** Napište vzorku, ktorej zodpovedajú všetky postupnosti znakov „a“ a „b“, ktoré nezodpovedajú **ani jednej** zo vzoriek „ $b^*(ab^*ab^*)^*$ “ a „ $(a|b)^*b(a|b)^*b(a|b)^*$ “.

Tentokrát by teda medzi reťazce, ktoré zodpovedajú výslednej vzorke, mal patriť napr. reťazec „ab“.



### Študijný text: Základy použitia regulárnych výrazov

Pre jednoduchosť sa dohodneme, že všetky objekty, ktoré budeme hľadať, budú *reťazce* tvorené obmedzenou množinou znakov. Povolené znaky budú len písmená anglickej abecedy a cifry („a“-„z“, „A“-„Z“, „0“-„9“). Vyhľadávať budeme tak, že napíšeme regulárny výraz – teda nejakú *vzorčku* (pattern). Vzorka popisuje, ako vyzerajú reťazce, ktoré nás zaujímajú. Presnejšie, o každom reťazci vieme povedať, či vzorke zodpovedá (matches the pattern) a našim cieľom pri vyhľadávaní bude napísať vzorku tak, aby jej zodpovedali práve tie reťazce, ktoré chceme nájsť, a žiadne iné. Ako uvidíme nižšie, vo vzorke sa budú môcť vyskytovať aj niektoré iné znaky ako v reťazcoch.

Teraz si popíšeme základy tvorby vzoriek – teda povieme si, z čoho sa taká vzorka môže skladať a ktoré reťazce jej potom zodpovedajú.

- Základným stavebným kameňom vzoriek sú samotné znaky z vyššie uvedeného zoznamu. Vzorke tvorenej jediným znakom zodpovedá reťazec tvorený dotýčným znakom a nič iné.
- Základná operácia so vzorkami je zretazenie. Keď napíšeme dve vzorky za seba, dostaneme novú vzorku. Tej zodpovedajú reťazce zložené z dvoch častí, pričom prvá zodpovedá prvej vzorke a druhá druhej. Zretaziť samozrejme môžeme ľubovoľne veľa vzoriek. Napr. vzorka „jablko“ zodpovedá len reťazec „jablko“.
- Vzorky môžeme uzatvárať do obyčajných zátvoriek. Napr. vzorka „(jablko)“ zodpovedá len reťazec „jablko“ a nič iné.
- Logický or (alebo) je označovaný symbolom „|“. Ak ním spojíme dve vzorky, dostaneme novú, ktorej zodpovedajú aj reťazce zodpovedajúce prvej, aj reťazce zodpovedajúce druhej vzorke. Napr. vzorka „jabl(k|c)k“ zodpovedajú reťazce „jablko“ a „jablccko“.

Zretazenie má vyššiu prioritu ako or. Napr. vzorka „aaa|bbb“ zodpovedajú len reťazce „aaa“ a „bbb“.

- Inú možnosť, ako dať vo vzorke na výber, predstavuje množina znakov, ktoré sa na danom mieste môžu vyskytnúť. Tú zapisujeme „[znaky]“. Napríklad vzorka „jablk[oa]“ zodpovedajú reťazce „jablko“ a „jablka“.

Množina všetkých dostupných znakov sa skrátene zapisuje „.“. Teda vzorka „j...a“ zodpovedá každý 6-znakový reťazec začínajúci na j a končiaci na a.

Zložitejšie množiny znakov môžeme zapísať pomocou rozsahov, napr. „[a-z0-9]“ je ľubovoľné malé písmeno alebo číslica. Ak popis množiny znakov začína znakom „^“, znamená to negáciu: danej množine zodpovedajú všetky znaky okrem vymenovaných. Napríklad vzorka „[a-z][^a-zA-Z]“ zodpovedajú všetky dvojznakové reťazce, ktorých prvý znak je malé písmeno a druhý znak nie je ani malé, ani veľké písmeno.

- Ak chceme, aby sa mohla časť vzorky v reťazci zopakovať, použijeme *kvantifikátor*. Základné kvantifikátory sú „?“ (nulakrát alebo jedenkrát) a „\*“ (ľubovoľne veľakrát, vrátane nulakrát).

Napríklad vzorka „jablc?ko“ je ekvivalentná so vzorkou „jabl(k|c)ko“. Vzorka „pe\*s“ zodpovedajú okrem iného reťazce „ps“, „pes“ a „peeees“. Vzorka „(ab)\*c“ *nezodpovedá* reťazec „aabbcc“, len reťazce „c“, „abc“, „ababc“, atď.

Pri opakovaní vzorky jej nemusí zakaždým zodpovedať ten istý reťazec. Napríklad vzorka „j.\*a“ zodpovedá nielen reťazec „jxxxa“, ale aj reťazec „jahoda“.

Vzorka „<[^>]\*>“ zodpovedá každý XML tag – reťazec začína znakom „<“, za ním nasleduje ľubovoľne veľa znakov iných od „>“ a za nimi nasleduje znak „>“.

---

### TRIDSIATY PRVÝ ROČNÍK OLYMPIÁDY V INFORMATIKE

Príprava úloh: Eduard Batmendijn, Michal Forišek, Marián Horňák, Jaroslav Petrucha

Recenzia: Michal Forišek

Slovenská komisia Olympiády v informatike

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015