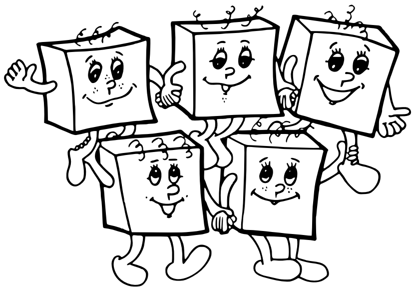
OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

http://oi.sk/



dvadsiaty siedmy ročník

školský rok 2011/2012

zadania krajského kola
kategória A

Priebeh krajského kola

Krajské kolo 27. ročníka Olympiády v informatike, kategória A, sa koná 24. 1. 2012 v dopoludňajších hodinách. Na riešenie úloh majú súťažiaci **4 hodiny čistého času**. Rôzne úlohy riešia súťažiaci na samostatné listy papiera. Akékoľvek pomôcky okrem písacích potrieb (napr. knihy, výpisy programov, kalkulačky) sú zakázané.

Čo má obsahovať riešenie úlohy?

- Slovne popíšte algoritmus.
  Slovný popis riešenia musí byť jasný a zrozumiteľný i bez nahliadnutia do samotného algoritmu/programu.
- Zdôvodnite správnosť vášho algoritmu.
- Uveďte a zdôvodnite jeho časovú a pamäťovú zložitosť.
- Podrobne uveďte dôležité časti algoritmu, ideálne vo forme programu v Pascale alebo C/C++.
- V prípade, že používate vo svojom programovacom jazyku knižnice, ktoré obsahujú implementované dátové štruktúry a algoritmy (napr. STL pre C++), v popise algoritmu stručne vysvetlite, ako by ste napísali program s rovnakou časovou zložitosťou bez použitia knižnice.

Hodnotenie riešení

Za každú úlohu môžete získať od 0 do 10 bodov.

Pokiaľ nie je v zadaní povedané ináč, najdôležitejšie dve kritériá hodnotenia sú v prvom rade **správnosť** a v druhom rade **efektívnosť** navrhnutého algoritmu. Na výslednom počte bodov sa môže prejaviť aj kvalita popisu riešenia a zdôvodnenie tvrdení o jeho správnosti a efektívnosti.

Efektívnosť algoritmu posudzujeme vypočítaním jeho časovej zložitosti – funkcie, ktorá hovorí, ako dlho vykonanie algoritmu trvá v závislosti od veľkosti vstupných parametrov. Nezávisí pri tom na konštantných faktoroch, len na rádovej rýchlosti rastu tejto funkcie.

V zadaní úloh uvádzame časť „Hodnotenie“, v ktorej nájdete približné limity na veľkosť vstupných údajov. Pod pojmom „efektívne vyriešiť“ chápeme to, že váš program spustený na modernom počítači by mal dať odpoveď nanajvýš do niekoľkých sekúnd.

Údaje z tejto časti zadania by mali slúžiť hlavne na to, aby ste o riešení, ktoré vymyslíte, vedeli približne povedať, koľko bodov zaň dostanete.

A-II-1 Bezpečné medziplanetárne cestovanie

Planéty vo vesmíre môžeme rozdeliť na tri druhy:
– *typ 0: neobývateľné* planéty, na ktorých človek okamžite zahynie,
– *typ 1: nehostinné* planéty, na ktorých človek chvíľu prežije, ale nie dlhodobo,
– *typ 2: prívetivé* planéty, na ktorých človek môže spokojne žiť.

Všetky rasy žijúce vo vesmíre cestujú medzi planétami prostredníctvom siete **obojsmerných** teleportov. (Jednosmerné teleporty zrušili po tom, ako sa školský výlet z planéty QYX nevedel dva roky vrátiť späť domov.)

Postupnosť na seba nadväzujúcich teleportov voláme *cesta*. Cesta je pre ľudí *bezpečná*, ak neprechádza cez žiadnu planétu typu 0. Ak z nehostinnej planéty p vedie bezpečná cesta na nejakú prívetivú planétu, hovoríme, že z planéty p sa *človek vie zachrániť*.

Teleport je *kritický*, ak by jeho porucha spôsobila, že sa zmenší počet planét, z ktorých sa človek vie zachrániť. Inými slovami, teleport t je kritický, ak existuje planéta typu 1, z ktorej sa vieme dostať bezpečnou cestou na (aspoň jednu) planétu typu 2, ale pri každej takejto ceste musíme použiť teleport t.

Súťažná úloha

V prvom riadku vstupu je počet planét n a počet teleportov m. Planéty majú čísla od 1 po n. V druhom riadku je pre každú planétu zadaný jej typ. Následne je pre každý teleport zadaná dvojica planét, ktoré spája. Medzi každou dvojicou planét vedie najviac jeden teleport.

Nájdite a vypíšte všetky kritické teleporty.

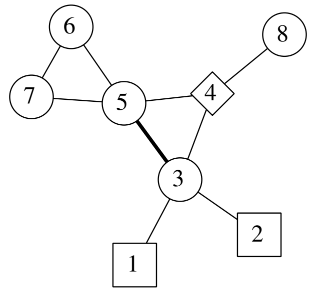
Príklad

vstup

```
8 9
2 2 1 0 1 1 1 1
1 3
2 3
3 4
3 5
4 5
5 6
6 7
5 7
4 8
```

výstup

```
3 5
```



Vstup je znázornený na obrázku napravo.
Planéty typu 0, 1 a 2 sú zakreslené ako kosoštvorec, kruhy a štvorce.
Človek sa vie zachrániť z nehostinných planét 3, 5, 6 a 7. Ak by sa ale pokazil teleport medzi planétami 3 a 5, už by sa nedalo zachrániť z planét 5, 6 a 7. Tento teleport je teda kritický. Na obrázku je hrubou čiarou.

Žiaden iný teleport už kritický nie je. Špeciálne si všimnite, že nám neprekáža pokazenie teleportu medzi planétami 4 a 8. Z planéty 8 sa tak či tak zachrániť nedalo.

Hodnotenie

- Plných 10 bodov môže získať riešenie, ktoré zvládne efektívne vyriešiť aj vstup so stotisíc planétami a miliónmi teleportov.
- Až 7 bodov sa dá získať za riešenie, ktoré zvládne efektívne vyriešiť vstup s tisíc planétami a pár tisícmi teleportov.
- Každé korektné riešenie, bez ohľadu na to, ako pomalé bude, môže získať aspoň 4 body.

A-II-2 Vlámačka à la Banach-Tarski

Po krátkom pobyte na slobode sa šialený robot Roberto opäť vydal na zločinecké chodníčky. Vlámal sa do laboratória profesora Farnswortha a chce si odtiaľ odniesť v obrovskom vreci profesorovu zbierku modelov vesmírnych lodí, aby ju speňažil na čiernom trhu. Ako však práve zistil, zbierka je natoľko rozsiahla, že ju celú nedokáže uniesť.

Okrem rôznych neužitočných vynálezov sa v laboratóriu nachádza aj duplikátor modelov vesmírnych lodí. Tento stroj dokáže vyrobiť presnú kópiu ľubovoľného modelu, no potrebuje na to istý čas. Vzniknutá kópia je na nerozoznanie od originálu – má rovnakú hmotnosť aj cenu na čiernom trhu.

Roberto sa bojí odhalenia, preto sa ponáhľa a nechce použiť duplikátor viac ako jedenkrát. Poraďte mu, či a ktorý model vesmírnej lode má zduplikovať, aby vedel ukradnúť modely s čo najvyššou celkovou cenou.

Súťažná úloha

V prvých dvoch riadkoch vstupu je zadaná Robertova nosnosť m a počet modelov n. Súčet hmotností modelov, ktoré Roberto vynesie, nesmie presiahnuť m.

Nasleduje n riadkov, každý obsahuje popis jedného modelu vesmírnej lode – jeho hmotnosť w_i a cenu c_i. Modely sú očíslované od 1 po n v poradí, v akom sú na vstupe.

Môžete predpokladať, že hmotnosti modelov aj Robertova nosnosť sú **rozumne malé kladné celé čísla**. (Presnejšie údaje nájdete na konci zadania v časti Hodnotenie.)

Vypíšte číslo modelu, ktorý má Roberto zduplikovať, prípadne správu, že nemá zduplikovať žiaden model. Ak existuje viacero možností vedúcich k optimálnemu riešeniu, vypíšte ľubovoľnú z nich.

Následne vypíšte najvyššiu možnú celkovú cenu modelov, ktoré potom dokáže Roberto naraz vyniesť.

Príklady

vstup

```
5
4
4 1
1 3
3 5
2 5
```

výstup

```
zduplikuj model 4
najlepsia cena 13
```

Zduplikujeme model $(2,5)$ a potom si vezmeme modely $(1,3)$, $(2,5)$ a $(2,5)$.
Ich celková hmotnosť je 1+2+2=5, čo ešte Roberto unesie, a ich celková cena je 3+5+5=13.

vstup

```
5
2
2 1
4 3
```

výstup

```
nezduplikuj nic
najlepsia cena 3
```

Nezáleží na tom, či niečo zduplikujeme, aj tak si vezmeme iba jeden kus – model s váhou 4 a cenou 3.

Hodnotenie

- Plných 10 bodov môže získať riešenie, ktoré zvládne efektívne vyriešiť aj vstup s tisíc modelmi a Robertovou nosnosťou desaťtisíc.
- Až 8 bodov sa dá získať za riešenie, ktoré zvládne efektívne vyriešiť vstup so sto modelmi a Robertovou nosnosťou tisíc.
- Jedným bodom môže byť zohľadnená aj pamäťová zložitosť vášho riešenia.

Pozor! Sústreďte sa na to, aby vaše riešenie bolo v prvom rade úplne korektné a vždy našlo úplne najlepšiu možnú celkovú cenu. Riešenia, ktoré majú principiálne nesprávny algoritmus, ktorý občas najlepšiu cenu nenájde, budú bodované veľmi prísne!

A-II-3 Parazity

„Za všetko môžu parazity!“ hlásala titulná strana Galaktického biologického spravodajského týždenníka (GBST). Vedcom sa totiž podarilo zistiť, že rôzne parazity vedia ovplyvňovať myslenie svojich hostiteľov vo svoj prospech a dokonca sú hnacím motorom evolúcie. Ďalším prekvapením bolo, že sa parazitom páčia špeciálne typy DNA.

DNA je postupnosť tzv. dusíkatých báz. U pozemských organizmov sú štyri (adenín, cytozín, guanín a tymín), ale mimozemské organizmy ich môžu mať viac. Všetky možné dusíkaté bázy vo vesmíre si očíslujeme od 1 po n. Následne môžeme každú DNA reprezentovať ako postupnosť celých čísel z tohto rozsahu.

Parazitom sa najviac páčia také súvislé úseky DNA, ktoré obsahujú (aspoň raz) každú z n možných dusíkatých báz. Komora Slovenských Parazitológov (KSP) sa teraz rozhodla preskúmať DNA rôznych vesmírnych organizmov a zistiť, ktorá z nich sa ako veľmi parazitom páči.

Súťažná úloha

V prvom riadku vstupu je zadaný počet dusíkatých báz n a dĺžka skúmanej DNA d.

V druhom riadku je popis DNA: postupnosť d celých čísel. Každé z týchto čísel je z rozsahu od 1 po n.

Vypočítajte, koľko je v zadanej DNA súvislých úsekov, ktoré obsahujú každú dusíkatú bázu aspoň raz.

Príklady

vstup
```
1 4
1 1 1 1
```
výstup
```
10
```

Každý úsek je jednoznačne určený miestami, kde začína a končí. Aj ak rôzne úseky obsahujú presne tú istú postupnosť dusíkatých báz, zarátame každý z nich.

vstup
```
3 5
1 2 1 3 2
```
výstup
```
5
```

Sú to nasledujúce úseky: (1,2,1,3), (1,2,1,3,2), (2,1,3), (2,1,3,2) a (1,3,2).
Inými slovami, sú to úseky od prvej pozície po štvrtú, od prvej po piatu, od druhej po štvrtú, od druhej po piatu a od tretej po piatu pozíciu.

vstup
```
4 5
1 2 4 4 2
```
výstup
```
0
```

V danej postupnosti sa nenachádza báza 3, preto neexistuje žiaden úsek obsahujúci každú bázu aspoň raz.

Hodnotenie

- Optimálne riešenie, za ktoré môžete dostať 10 bodov, zvládne efektívne vyriešiť aj vstup s miliónom rôznych dusíkatých báz a DNA dĺžky niekoľko miliónov.
- Až 8 bodov sa dá získať za riešenie fungujúce pre ľudí ($n = 4$), ak zvládne efektívne vyriešiť aj vstup s DNA dĺžky niekoľko miliónov.
- Medzi 6 a 8 bodmi môžu získať riešenia, ktoré si za sekundu poradia so stotisícprvkovou DNA – podľa toho, ako veľké n zvládajú.
- Každé korektné riešenie, bez ohľadu na to, ako pomalé bude, môže získať aspoň 3 body.

A-II-4 Zlomkové programy, maximum a sčítanie

Študijný text k tejto úlohe je uvedený na nasledujúcej strane.
Je identický so študijným textom z domáceho kola.

Súťažná úloha

a) (3 body) Na vstupe je číslo n tvaru $2^x 3^y$, pričom $x, y \geq 0$.
Napíšte program, ktorý ho prerobí na číslo $5^{\max(x,y)}$.

Teda napríklad:
- z čísla $n = 144 = 2^4 3^2$ by mal vyrobiť číslo $5^4 = 625$,
- z čísla $n = 729 = 2^0 3^6$ by mal vyrobiť číslo $5^6 = 15625$.

b) (7 bodov) Na vstupe je číslo n tvaru $2^x 3^y 7$, pričom $x, y \geq 0$.
Napíšte program, ktorý ho prerobí na číslo $2^x 3^y 5^{x+y}$.

Teda napríklad:
- z čísla $n = 1008 = 2^4 3^2 7$ by mal vyrobiť číslo $2^4 3^2 5^6$,
- z čísla $n = 5103 = 2^0 3^6 7$ by mal vyrobiť číslo $3^6 5^6$.

Hodnotenie

Pri hodnotení úlohy sa bude mierne prihliadať aj na *časovú zložitosť* vašich zlomkových programov – teda na počet krokov výpočtu v závislosti od parametrov x a y. Ak bude váš program potrebovať *rádovo* viac krokov ako vzorový, môžete získať nanajvýš 2 body v prvej, resp. nanajvýš 6 bodov v druhej podúlohe.

Študijný text

Zlomkové programy predstavujú jeden veľmi jednoduchý spôsob, ako počítať niektoré funkcie na prirodzených číslach. Samotný zlomkový program je veľmi jednoduchý: je to konečná postupnosť zlomkov, teda kladných racionálnych čísel $(z_1, \dots, z_k)$.

Výpočet zlomkového programu prebieha v krokoch. Počas výpočtu si udržiavame jediné celé číslo, tzv. *aktuálnu hodnotu* a. Na začiatku výpočtu na vstupe n je $a = n$. Každý krok výpočtu vyzerá nasledovne: Nájdeme najmenšie i také, že $a \cdot z_i$ je celé číslo, a zmeníme aktuálnu hodnotu na $a \cdot z_i$. Ak také i neexistuje, výpočet končí.

Príklad 1. Ukážeme si program, ktorý pre vstup $n = 2^x$ (kde $x \geq 0$) vyrobí výstup 3^y, kde $y = x \bmod 3$.

Jedným takýmto programom je postupnosť $(1/8, 9/4, 3/2)$. Slovne si priebeh výpočtu tohto programu môžeme popísať nasledovne: kým sa to dá, zmenšuj x o 3. Keď sa to už nedá, máme v a číslo 1, 2, alebo 4, vyrobíme z neho teda 1, 3, alebo 9.

Príklad výpočtu pre $n = 1024 = 2^{10}$: Hodnota a sa bude meniť nasledovne: $2^{10} \xrightarrow{1} 2^7 \xrightarrow{1} 2^4 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{3} 3$. (Číslo nad šípkou je poradovým číslom zlomku, ktorým sme a v danom kroku prenásobili.)

Všimnite si, že záleží na poradí zlomkov. Napríklad program $(9/4, 3/2, 1/8)$ by z čísla 2^x vyrobil číslo 3^x. Zlomok $1/8$ by sa pri výpočtoch tohto programu nikdy nepoužil.

Iné vyhovujúce programy sú $(1/8, 3/2)$, $(3/2, 1/27)$ a $(1/27, 3/2)$. Rozmyslite si, prečo každý z nich tiež rieši zadanú úlohu.

Príklad 2. Čo urobí program $(2/2)$ na vstupe $n = 4$? A čo na vstupe $n = 7$?

Obľúbenou chybou je odpovedať, že na vstupe $n = 4$ sa tento program zacyklí, ale na vstupe $n = 7$ sa program zastaví, lebo 7 nie je deliteľné dvomi. Správna odpoveď ale je, že v **oboch** prípadoch bude program bežať do nekonečna. Zaujímajú nás totiž len hodnoty zlomkov, nie ich zápis. Zlomok $2/2$ predstavuje racionálne číslo 1, a $7 \cdot (2/2) = 7 \cdot 1$ je celé číslo.

Aby ste sa vo svojich riešeniach takto nepoplietli, odporúčame uvádzať všetky zlomky v základnom tvare. Pre takto zapísanú postupnosť zlomkov potom už platí, že v každom kroku hľadáme najmenšie i, pre ktoré menovateľ i-teho zlomku delí aktuálnu hodnotu.

Príklad 3. Ukážeme si program, ktorý pre vstup $n = 2^{x+1}$ (kde $x \geq 0$) vyrobí výstup 3^{x+2}.

Číslo na vstupe je určite párne a nie je deliteľné žiadnym prvočíslom iným ako 2. Použijeme prvočíslo 11 ako značku, že už nie sme na začiatku výpočtu. V prvom kroku teda prepíšeme číslo 2^{x+1} na $2^x 3^2 11$. Toto dosiahneme zlomkom $3^2 \cdot 11/2 = 99/2$.

Ak už vidíme v prvočíselnom rozklade aktuálnej hodnoty prvočíslo 11, znamená to, že prvý krok máme úspešne za sebou. Môžeme teda spokojne „meniť dvojky na trojky". To vieme dosiahnuť napríklad postupnosťou zlomkov $(3 \cdot 13)/(2 \cdot 11)$ a $11/13$. (Všimnite si, že nestačí použiť jeden zlomok $33/22$. Ak vám nie je jasné, prečo, prečítajte si ešte raz príklad 2.)

Časom sa takto dostaneme k číslu $3^{x+2}11$. V tejto situácii už stačí len vydeliť aktuálnu hodnotu číslom 11 a môžeme skončiť.

Pozor treba dať na to, že vyššie popísané zlomky treba dať do správneho poradia: $(39/22, 11/13, 1/11, 99/2)$. V prvom kroku výpočtu sa zjavne použije posledný zlomok. Od tejto chvíle je aktuálna hodnota deliteľná číslom 11 alebo 13. Striedavo sa používajú prvé dva zlomky, až kým sa nedostaneme do situácie $a = 3^{x+2}11$. Vtedy sa už prvý ani druhý zlomok použiť nedá. Použije sa preto tretí, čím dosiahneme $a = 3^{x+2}$ a výpočet zjavne končí.

Poznámka. V riešeniach podobných tomu v príklade 3 nie je nutné čitatele a menovatele zlomkov roznásobovať. Pokojne uveďte svoje riešenie v tvare $\big((3 \cdot 13)/(2 \cdot 11),\ 11/13,\ 1/11,\ (3^2 \cdot 11)/2\big)$.

DVADSIATY SIEDMY ROČNÍK OLYMPIÁDY V INFORMATIKE

Autori úloh: Michal Anderle, Vladimír Boža, Michal Forišek, Peter Fulla
Recenzent: Michal Forišek
Slovenská komisia Olympiády v informatike
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012